Teoria dos Jogos: Algumas Noções Elementares

Orlando Gomes, ISCAL

Resumo: Em muitas situações de interação, os agentes são compelidos a agir estrategicamente. Isto significa que as linhas de ação que um agente escolhe tomar são condicionadas ou determinadas pelo comportamento observado ou esperado de outros. A teoria dos jogos consiste precisamente no estudo de como os intervenientes numa determinada relação de interação estratégica atuam de modo racional, no sentido de promover o melhor resultado possível para si próprios. Ao analisar um jogo é necessário identificar as estratégias disponíveis para cada um dos jogadores, quais os resultados que a escolha de cada estratégia permite alcançar, os momentos de tempo em que as decisões são tomadas e que informação têm disponível os participantes na relação de interação. Apresentar-se-á conceitos centrais como o de estratégia dominante, ou o de equilíbrio de Nash; far-se-á a distinção entre jogos de informação completa e de informação incompleta, e entre jogos em forma normal e em forma extensiva; será ainda feita menção à teoria dos jogos evolucionária.

1. Pensamento estratégico

A todo o instante os agentes económicos, famílias e empresas, têm de tomar decisões. Estas poderão ter uma de duas naturezas; ou são independentes do comportamento individual de terceiros, como é o caso da decisão de quanto produzir num mercado perfeitamente concorrencial, ou então são decisões que têm consequências sobre os resultados que aqueles com que se interage podem obter, cenário que é comum em mercados oligopolistas. Quando um agente atua estrategicamente, sabe que as suas escolhas têm impacto sobre terceiros e que as opções de terceiros têm um efeito direto sobre os resultados que ele pode alcançar. São estas situações de interação estratégica que caem no âmbito da teoria dos jogos.

Para definir um jogo são necessários alguns elementos de base. Primeiro, há que considerar um conjunto de jogadores; no caso mais simples a interação circunscreve-se a apenas dois jogadores. É o que acontece, por exemplo, quando duas empresas atuam estrategicamente no sentido de fixar preços ou quando comprador e vendedor negoceiam a transação de um bem ou serviço. Cada jogador terá, então, um conjunto de estratégias que poderá escolher, dadas as estratégias disponíveis para os outros jogadores. Por fim, cada estratégia produzirá um resultado (*payoff*) que dependerá decisivamente das linhas de ação ou estratégias escolhidas pelos restantes jogadores.

No sentido de ilustrar um jogo na sua forma mais simples, considere-se um cenário onde interagem dois jogadores (a empresa A e a empresa B) ambos com duas estratégias disponíveis (escolher vender um bem homogéneo a um preço alto (a) ou a um preço baixo (b)). Os resultados ou *payoffs* deste jogo irão corresponder à receita que cada empresa consegue obter em cada um dos cenários possíveis. Imagine-se que as empresas enfrentam exatamente a mesma procura, de modo que os seus resultados vão ser simétricos.

Convencione-se que uma empresa que opta pelo preço alto quando a outra escolhe o preço baixo vai perder clientes e ganhar 0, enquanto a segunda ganha 10. Quando ambas vendem ao preço baixo, as duas irão obter uma receita de 5; se as duas empresas optam por um preço alto, terão de dividir o mercado e, por conseguinte, obtêm uma receita intermédia de, digamos, 7. A seguinte matriz de resultados sistematiza a informação descrita,

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Empresa B</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Preço baixo</td><td>Preço alto</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Empresa A</td><td>Preço baixo</td><td>(5,5)</td><td>(10,0)</td></tr>
<tr><td>Preço alto</td><td>(0,10)</td><td>(7,7)</td></tr>
</table>

Os valores no quadro são os resultados obtidos por cada um dos jogadores quando escolhem dada estratégia, tendo em conta a estratégia escolhida pelo outro jogador. O primeiro valor em cada par corresponde ao resultado da empresa apresentada em linha (A) e o segundo valor respeita ao resultado da empresa apresentada em coluna (B).

No caso concreto apresentado, não é difícil identificar qual o comportamento que à partida cada um dos agentes irá adotar. Observando a tabela verifica-se que a empresa A tem vantagem em escolher um preço baixo, independentemente de qual a escolha efetuada pela empresa B; o mesmo acontece com a empresa B. Logo, ambas as empresas vão optar pelo preço baixo e o resultado do jogo é o dado pelo par de resultados na primeira célula da matriz.

A observação da matriz deixa claro que haveria opções melhores para cada um dos jogadores; no entanto, na ausência de possibilidade de cooperação, essas opções não se concretizam. Em conluio, as duas empresas prefeririam fixar o preço alto, uma vez que assim o *payoff* seria superior para ambas. No entanto, qualquer das empresas tem vantagem em romper esse compromisso de manter o preço alto. Baixando o preço, a empresa que o fizesse obteria um resultado ainda melhor (10) e a outra perderia todo o mercado. Como ambas as empresas vão agir da mesma forma o equilíbrio possível é o de escolha de fixação de preços baixos, que não é o resultado conjunto mais apelativo. Como se definirá na próxima secção, diz-se neste caso que é possível atingir um resultado não cooperativo.

2. Jogos em forma normal e com informação completa: estratégia dominante e equilíbrio de Nash

O exemplo de interação apresentado na secção precedente é o mais simples que se pode conceber; para além da dimensão mínima do jogo (dois jogadores e duas estratégias), existem outros aspetos que contribuem para essa simplicidade: por um lado, existe informação completa, no sentido em que cada jogador está perfeitamente informado sobre os resultados que os outros jogadores podem obter em virtude da situação de interação. Por outro lado, o jogo é estático, no sentido em que os agentes fazem as suas escolhas em simultâneo. Posteriormente, far-se-á referência a jogos de informação incompleta e a jogos sequenciais e dinâmicos. Para já concentra-se a atenção em jogos estáticos, também designados por jogos em forma normal, ignorando-se a questão da existência de eventuais problemas de informação incompleta.

Considere-se a seguinte matriz de resultados genérica:

		Jogador *B*	
		e1	*e2*
Jogador *A*	*E1*	(a_{11},b_{11})	(a_{12},b_{12})
	E2	(a_{21},b_{21})	(a_{22},b_{22})

O objetivo do jogo é encontrar as estratégias escolhidas por cada um dos jogadores e, por acréscimo, os *payoffs* que estes irão obter em função da escolha das respetivas estratégias. O resultado assim atingido designa-se por equilíbrio do jogo, o qual poderá ou não existir, em função da relação entre *payoffs* na matriz.

A caraterização do jogo pode ser feita a partir das seguintes definições:

- **Estratégia dominante**: para qualquer dos jogadores, a estratégia por ele escolhida designa-se dominante se ela é a melhor para o jogador independentemente da estratégia do outro jogador;

- **Equilíbrio dominante**: um equilíbrio dominante é o resultado de uma situação de interação estratégica que se carateriza pelo facto de todos os jogadores envolvidos possuírem uma estratégia dominante.

- **Ausência de equilíbrio**: quando dois jogadores têm de escolher entre duas estratégias e nenhum deles está perante uma estratégia dominante, ou seja, quando nenhum deles pode escolher independentemente do outro, não existe possibilidade de equilíbrio estratégico. Cada um dos jogadores vai ficar eternamente à espera que o outro atue.

- **Equilíbrio de Nash ou equilíbrio não cooperativo**: este equilíbrio é o resultado da interação entre dois jogadores quando pelo menos um dos jogadores tem uma estratégia dominante.

Num equilíbrio de Nash, nenhum jogador pode melhorar o seu resultado, dada a estratégia do outro jogador. Cada estratégia é a melhor resposta face à estratégia que o outro jogador decidiu seguir. O equilíbrio de Nash designa-se também por equilíbrio não cooperativo, uma vez que cada uma das partes escolhe a estratégia que é melhor para si, sem que haja possibilidade de conluio e portanto sem que se atenda ao bem-estar geral.

Note-se um aspeto importante destas definições. A noção de equilíbrio de Nash é entendida numa perspetiva ampla: ela abrange as situações de equilíbrio dominante e todas aquelas situações em que apenas um dos dois jogadores está na posse de uma estratégia dominante. Portanto, pode afirmar-se que todo o equilíbrio dominante é um equilíbrio de Nash, mas o contrário não é verdade.

No exemplo da secção anterior, ambos os jogadores possuem uma estratégia dominante. Pode, por isso, falar-se num equilíbrio dominante, que não deve, no entanto, ser confundido com um equilíbrio cooperativo, uma vez que o resultado a que se chega não é aquele que seria obtido em condições de cooperação ou conluio entre os jogadores. Está em causa um equilíbrio não cooperativo, uma vez que os agentes não negoceiam formalmente no sentido de coordenar as suas ações.

Regresse-se à tabela genérica acima apresentada. E1 será uma estratégia dominante para o jogador *A* se se verifica a condição:

$a_{11}>a_{21}$ e $a_{12}>a_{22}$ (1)

Se, perante a escolha do jogador *B*, o jogador *A* prefere a estratégia *E1* à estratégia *E2* independentemente daquela escolha, a estratégia *E1* é dominante para o jogador *A*, o que se traduz na condição (1).

Pela mesma ordem de ideias, a estratégia *E2* será dominante para o jogador *A* se a condição (2) for verificada:

$a_{21}>a_{11}$ e $a_{22}>a_{12}$ (2)

Para o jogador *B*, podemos igualmente explicitar as estratégias dominantes. Se

$b_{11}>b_{12}$ e $b_{21}>b_{22}$ (3)

então a estratégia *e1* será sempre preferida a *e2* independentemente da escolha do jogador *A*. Sob a condição (3) a estratégia *e1* é dominante para o jogador *B*. Similarmente, se a condição (4) for verdadeira, a estratégia *e2* é uma estratégia dominante para o jogador *B*.

$b_{11}> b_{12}$ e $b_{21}>b_{22}$ (4)

A não existência de estratégias dominantes implica a verificação das condições contrárias, isto é,

$a_{11}>a_{21}$ e $a_{22}>a_{12}$ (5)

$a_{21}>a_{11}$ e $a_{12}>a_{22}$ (6)

$b_{11}>b_{12}$ e $b_{22}>b_{21}$ (7)

$b_{12}> b_{11}$ e $b_{21}>b_{22}$ (8)

Perante qualquer das condições (5) a (8), o jogador não prefere dada estratégia independentemente da estratégia preferida pelo outro jogador; não há, nestes casos, uma estratégia dominante.

No sentido de contemplar todos os casos possíveis, pode ainda introduzir-se o conceito de dominância fraca. As estratégias contempladas pelas condições (1) a (4) são estratégias dominantes num sentido forte ou estrito. Se os sinais de maior nestas condições forem substituídos por sinais de maior ou igual diz-se que as estratégias são fracamente dominantes, ou seja, no pior dos cenários poderão ser escolhidas por ser indiferente escolher estas ou outras.

Ao combinar as possíveis condições para os jogadores *A* e *B*, emergem dezasseis possibilidades. Se para o jogador *A* é verdadeira a condição (1) e para o jogador *B* é verdadeira a condição (3), então os jogadores têm como estratégia dominante, respetivamente, as estratégias *E1* e *e1* estamos perante um equilíbrio dominante. Outras situações em que prevalece um equilíbrio dominante são aquelas em que as condições (2) e (3) são verificadas (neste caso, o jogador *A* prefere a estratégia *E2* e o jogador *B* a estratégia *e1*, que são as respectivas estratégias dominantes), ou (1) e (4) (caso em que o jogador *A* tem como estratégia dominante *E2* e o jogador *B* a estratégia *e1* ou, ainda, (2) e (4) (sob este último grupo de condições, o equilíbrio dominante resulta do facto de as estratégias dominantes do jogador *A* e do jogador *B* serem, respetivamente, *E2* e *e2*.

Se alguma das outras condições, (5), (6), (7) ou (8), é verificada, não existe um equilíbrio dominante. Quanto muito, poderá continuar a existir um equilíbrio de Nash, num cenário em que a estratégia de um dos jogadores está condicionada pela estratégia dominante que o outro jogador possui. No caso em que são verificadas as condições (1) e (7), o jogador *A* vai escolher a sua estratégia dominante que é *E1* enquanto o jogador *B* vai escolher a sua estratégia em função da estratégia dominante do outro. Como $b_{11}>b_{12}$ sob (7), perante a escolha de *E1* pelo jogador *A*, o jogador *B* terá vantagem na escolha da estratégia *e1*. Sob as condições (1) e (8) a ação do jogador *A* será a mesma que no caso anterior, ou seja, escolher a estratégia *E1* independentemente da escolha do jogador *B*. O jogador *B* reage optando pela estratégia *e2* uma vez que sob a condição (8), $b_{12}>b_{11}$.

Se a matriz de resultados esperados nos indica que (2) e (7) se verificam então a estratégia dominante para o jogador *A* será *E2* e perante esta, o jogador *B* vai optar por *e2*, dada a condição (7). Quando são verdadeiras as condições (2) e (8) as estratégias escolhidas pelos jogadores *A* e *B* são respetivamente *E2* (estratégia dominante para o jogador *A*) e *e1*.

Se a estratégia dominante corresponde à opção do jogador *B*, então este escolherá *e1* se se verifica (3) e *e2* se se verifica (4). O jogador *A*, não tendo estratégia dominante, vai optar pela estratégia *E1* sob as condições [(5) e (3)] ou [(6) e (4)] e pela estratégia *E2* quando verdadeiras as condições [(5) e (4)] ou [(6) e (3)].

Um último caso que acontece quando verdadeiras as condições [(5) e (7)], [(5) e (8)], [(6) e (7)] ou [(6) e (8)], implica a inexistência de um equilíbrio já que nenhum dos jogadores será capaz de escolher uma estratégia preferível à outra dado que ambos esperam que o parceiro de jogo faça a escolha primeiro para poderem decidir. Como nenhum deles tem uma estratégia dominante nenhum vai ter incentivo para decidir em primeiro lugar, e ter-se-á uma situação de impasse ou situação sem equilíbrio em que os jogadores não são capazes de optar, de um ponto de vista racional, por uma das estratégias.

3. Exemplos de jogos em forma normal

A formalização de um jogo como acima descrito permite caraterizar de modo simplificado inúmeras situações em que esteja em causa a tomada de decisão estratégica; os campos de aplicação da teoria dos jogos são imensos, desde a economia à biologia, passando pelas relações sociais ou quaisquer outras em que os agentes entram em relação direta no sentido de procurar alcançar determinados resultados.

Nesta secção apresentam-se alguns exemplos, que cobrem áreas diferentes. Começa-se por caraterizar um dos jogos mais populares, o designado dilema do prisioneiro. No dilema do prisioneiro dois indivíduos são chamados a prestar declarações na polícia por serem suspeitos de terem cometido um crime em conjunto. As autoridades não têm provas suficientes para acusar os suspeitos e, portanto, vão procurar que eles testemunhem um contra o outro. Para impossibilitar a cooperação, os suspeitos são colocados em salas de interrogatório diferentes.

A polícia comunica a cada suspeito que se denunciar o parceiro ele será libertado – desde que o outro suspeito não o denuncie também – e receberá uma recompensa por testemunhar. Caso nenhum dos suspeitos denuncie o parceiro, serão ambos libertados por falta de provas, sem que seja paga qualquer recompensa. Caso ambos denunciem o outro indivíduo, eles são presos mas recebem a recompensa por testemunhar. Atribuindo à recompensa o valor 1 e à desutilidade da condenação o valor -3, a matriz de resultados deste jogo será:

		suspeito *B*	
		denuncia	*Não denuncia*
suspeito *A*	*denuncia*	(-2,-2)	(1,-3)
	Não denuncia	(-3,1)	(0,0)

A observação da tabela leva à conclusão imediata de que ambos os jogadores possuem uma estratégia dominante que é denunciar o parceiro. Logo, existirá um equilíbrio dominante que é a denúncia mútua e um resultado de -2 para cada jogador.

O resultado do dilema do prisioneiro (isto é, o seu equilíbrio de Nash) não é o melhor resultado conjunto. Se os suspeitos pudessem coordenar as suas ações não iriam denunciar-se mutuamente, pois isso permitiria obter um melhor resultado para cada um deles. Sob não cooperação atinge-se aquilo que pode ser designado como um equilíbrio ineficiente à Pareto.

Outros jogos que são frequentemente alvo de análise, nomeadamente no âmbito da economia, são aqueles que estão relacionados com a organização industrial e a rivalidade entre empresas em mercados não concorrenciais. Na primeira secção já se apresentou um jogo deste género. Considere-se um outro exemplo, que ilustra a coincidência entre o resultado da interação estratégica e o resultado que se obteria sob cooperação.

Admita-se que as empresas *A* e *B* têm a mesma estrutura de custos e a mesma procura. Cada empresa pode escolher entre manter o preço concorrencial (igual aos custos marginais) ou baixá-lo no sentido de levar o rival à falência. A matriz de resultados é:

		empresa *B*	
		Preço normal	*Preço baixo*
empresa *A*	*Preço normal*	(50,50)	(20,-20)
	Preço baixo	(-20,20)	(0,0)

De acordo com a tabela, se ambas as empresas mantiverem o preço conseguem obter lucros de 50, se baixarem o seu preço de venda reduzem o lucro do concorrente para 20 e transformam o seu lucro em prejuízo de -20. Se ambas baixarem os preços terão as duas lucro zero. Nesta situação, na realidade não existe qualquer interação estratégica; não só os dois jogadores têm estratégias dominantes como a escolha da estratégia dominante conduz ao melhor resultado possível para cada um dos agentes. Há, neste caso, uma coincidência entre os equilíbrios cooperativo e não cooperativo; manter os preços é sempre vantajoso, independentemente da forma como se encara o jogo e o comportamento dos participantes.

Outra área onde a teoria dos jogos pode dar um contributo importante relaciona-se com a explicação das restrições ao comércio internacional e aos conflitos comerciais que frequentemente surgem entre nações. Suponha-se dois países, *X* e *Y*, que podem escolher adotar uma política de comércio livre ou alternativamente erigir barreiras ao comércio internacional impondo, por exemplo, tarifas aos bens importados. Os resultados da implementação de uma ou outra estratégia encontram-se na seguinte matriz (valores correspondem a receitas de exportação adicionais face ao ano transato):

		País *Y*	
		Comércio livre	*Protecionismo*
País *X*	*Comércio livre*	(300,600)	(-200,700)
	Protecionismo	(400,-500)	(200,500)

Na ausência de cooperação, a relação de interação conduz a uma guerra comercial que contrai o comércio externo. Este é mais um exemplo de um equilíbrio não cooperativo ou equilíbrio de Nash que não maximiza o bem-estar geral. A estratégia dominante para ambos os jogadores é a estratégia de protecionismo, mas os dois países sabem que ganhariam mais numa situação de comércio livre. Este argumento justifica a importância das negociações internacionais que permitam a adoção de um resultado cooperativo.

Exemplos em que o equilíbrio de Nash não é eficiente, como o que se acaba de apresentar, proliferam a muitos níveis; dois casos óbvios são aqueles que respeitam à corrida ao armamento (em que os Estados escolhem um equilíbrio não cooperativo de obsessão com a segurança) ou a situação de tragédia dos comuns. Nesta última situação, os agentes sabem que têm vantagem conjunta em não sobre-utilizar determinado recurso (pense-se por exemplo na utilização do transporte individual), mas o equilíbrio não cooperativo leva precisamente a essa sobre-utilização.

Outros jogos conduzem a um resultado indeterminado porque para eles não são identificáveis estratégias dominantes. Considere-se alguns exemplos.

Suponha-se que num determinado jogo de futebol vai ser marcada uma grande penalidade. O marcador do *penalty* pode rematar para a esquerda ou para direita; o guarda-redes pode também lançar-se para a esquerda ou para a direita. Se coincidirem nas suas ações, não será golo; se não coincidirem, a grande penalidade é concretizada. A respetiva matriz de *payoffs* será:

		Guarda-redes	
		Esquerda	*Direita*
Marcador	*Esquerda*	(0,0)	(1,-1)
	Direita	(1,-1)	(0,0)

Neste jogo, nenhum dos jogadores possui uma estratégia dominante, e portanto não é possível encontrar um equilíbrio. O marcador do *penalty* tanto o pode marcar para a esquerda ou para a direita e por isso o guarda-redes também se pode lançar para a esquerda ou para a direita.

Outro exemplo semelhante ao anterior é o de um jogo onde dois indivíduos decidem escolher, cada um deles, a face de uma moeda (cara ou coroa). Se as faces das moedas coincidem, o jogador 1 recebe 1 € do jogador 2, e vice-versa no caso contrário. A tabela com os resultados é a seguinte:

		Jogador 2	
		Cara	*Coroa*
Jogador 1	*Cara*	(1,-1)	(-1,1)
	Coroa	(-1,1)	(1,-1)

Também neste jogo é evidente a ausência de estratégias dominantes e, portanto, de um equilíbrio para o jogo. Nenhum dos jogadores saberá antecipadamente qual a melhor opção, escolher cara ou escolher coroa.

Um outro exemplo, na linha dos já apresentados, é o jogo da batalha dos sexos. Neste jogo, imagine-se uma situação em que um casal decide entre ir ao teatro ou ir ao cinema. Ela prefere o teatro e ele prefere o cinema. No entanto, para qualquer dos dois é mais apelativo irem juntos ao teatro ou ao cinema do que escolherem sozinhos uma das opções. Sob esta descrição, voltamos a ter um jogo sem equilíbrio, conforme se pode constatar por observação da matriz que o descreve. Enquanto ele retira maior satisfação de ir ao cinema com ela e ela retira maior satisfação de ir ao teatro com ele, não vão ganhar qualquer utilidade se cada um deles tomar opções distintas.

		Ele	
		Cinema	*Teatro*
Ela	*Cinema*	(1,2)	(0,0)
	Teatro	(0,0)	(2,1)

Considere-se um último jogo, que ilustra a questão da dominância fraca. Para quaisquer dois jogadores, é possível escolher as estratégias v ou w, que conduzem aos seguintes resultados:

		Jogador 2	
		v	w
Jogador 1	v	(1,1)	(0,0)
	w	(0,0)	(0,0)

O jogador 1 prefere a estratégia v quando o jogador 2 escolhe v e é indiferente entre v e w quando o jogador 2 escolhe w. O jogo é simétrico e, portanto, o mesmo acontece com o jogador 2. Nestas circunstâncias, cada um dos jogadores nunca poderá ficar pior se escolher a estratégia v do que se escolher w, mas o contrário já não é verdade. Por conseguinte, a estratégia v é fracamente dominante em relação a w e será escolhida em detrimento desta última. Logo, existe um equilíbrio de Nash que corresponde ao resultado obtido através da escolha das estratégias fracamente dominantes de cada um dos jogadores, isto é, ambos vão escolher a estratégia v.

4. Estratégias dominadas, estratégias mistas e informação incompleta

Na secção precedente referiu-se que a forma de caraterizar o equilíbrio de um jogo passava pela identificação de estratégias dominantes. Na realidade, se se considerarem jogos com mais de duas estratégias alternativas para cada jogador, a lógica torna-se a contrária: será por eliminação sucessiva de estratégias dominadas que se chegará ao resultado de equilíbrio. Um exemplo ajuda a explicar este argumento.

Considere-se um jogo com a seguinte matriz de resultados:

		Jogador 2		
		v	w	x
Jogador 1	v	(6,1)	(0,-9)	(0,-8)
	w	(2,-2)	(6,5)	(-4,8)
	x	(4,8)	(7,2)	(-2,9)

Analisando as opções de cada um dos jogadores, verifica-se que nenhum deles tem à partida uma estratégia dominante. Nenhuma estratégia é preferível às outras duas, independentemente da escolha efetuada pelo outro jogador. No entanto, é possível identificar estratégias dominadas, isto é, estratégias que os jogadores nunca escolherão, por oferecerem *payoffs* sempre inferiores aos de outras linhas de ação.

No caso em concreto, para o jogador 1 a estratégia w é sempre superada pela estratégia x e, consequentemente, a estratégia w pode ser retirada do quadro para o jogador 1; da mesma forma, para o jogador 2 verifica-se que a estratégia w produz também resultados sempre inferiores aos permitidos pela linha de ação x; também para o jogador 2 podemos passar a ignorar a estratégia w.

A estratégia w é uma estratégia dominada para ambos os jogadores, pode ser removida e isso diminui a dimensão da matriz, voltando esta a ser uma matriz de dimensão 2.

		Jogador 2	
		v	x
Jogador 1	v	(6,1)	(0,-8)
	x	(4,8)	(-2,9)

Tendo reduzido a dimensão do jogo, é possível avaliá-lo como atrás. Para o jogador 1, v é uma estratégia dominante, donde esta será a estratégia escolhida por este jogador. O jogador 2 reage escolhendo também a estratégia v. Estas são as estratégias correspondentes ao equilíbrio de Nash, neste caso específico.

Até este ponto, considerou-se que os jogadores optam por estratégias puras, isto é, escolhem com certeza uma das potenciais estratégias. Em alternativa, pode assumir-se que se atribuem probabilidades à escolha de uma ou outra ação, caso em que as estratégias se passam a designar por estratégias mistas.

Recupere-se o jogo da batalha de sexos apresentado acima. Referiu-se então que o jogo não possuía um equilíbrio, dadas as preferências dos agentes envolvidos. No entanto, é possível calcular a probabilidade com que cada jogador vai escolher uma ou outra ação. Seja $p>0$ a probabilidade de 'ele' escolher cinema e $q>0$ a probabilidade de 'ela' escolher teatro.

Para que 'ele' seja indiferente entre cada uma das duas estratégias, tem de se verificar

$$p\times 2+(1-p)\times 0 = p\times 0+(1-p)\times 1 \qquad (9)$$

O primeiro membro da equação (9) reflete as escolhas de 'ele' quando 'ela' escolhe cinema e o membro direito da equação traduz as escolhas que 'ele' faz quando ela opta pelo teatro. Resolvendo a equação (9) constata-se que $p=1/3$, ou seja, 'ele' escolherá cinema com probabilidade 1/3.

Para que 'ela' seja indiferente entre as duas estratégias, verifica-se a condição

$$q\times 2+(1-q)\times 0 = q\times 0+(1-q)\times 1 \qquad (10)$$

Um mesmo tipo de resultado se obtém para 'ela': $q=1/3$, o que significa que 'ela' vai escolher teatro com uma probabilidade de 1/3.

Se quisermos inverter a interpretação, podemos dizer que 'ele' opta por escolher ir ao teatro com uma probabilidade de 2/3 e 'ela' escolhe ir ao cinema também com uma probabilidade de 2/3. Apesar de os dois preferirem uma determinada opção, o receio de ficarem isolados na sua opção, leva-os a atribuir uma maior probabilidade de escolha à opção que à partida consideram menos apelativa.

As estratégias mistas são importantes no raciocínio subjacente à teoria dos jogos porque garantem um resultado poderoso, nomeadamente que independentemente do número de jogadores, desde que cada um possua um número finito de estratégias puras, haverá sempre um equilíbrio de Nash, que poderá surgir sob a forma de adoção de estratégias mistas.

Um último ponto a tratar nesta secção relaciona-se com a informação que cada um dos jogadores possui a propósito dos *payoffs* dos outros jogadores. Até ao momento admitiu-se que esta informação é completa; no entanto, é relativamente fácil estender a análise para cenários de informação incompleta.

Uma vez mais, o argumento é explicado com recurso a um exemplo. Sejam duas empresas que escolhem o preço a fixar em função do conhecimento das condições de mercado e das condições de custos (suas e da outra empresa). As empresas vão poder escolher entre dois preços, p_A e p_B. Assume-se que a empresa *B* tem informação completa sobre os custos de produção em que a empresa *A* incorre, mas que o contrário não é verdade. A empresa *A* sabe que a empresa *B* terá custos altos ou custos baixos com igual probabilidade.

Em que é que este jogo difere dos anteriores? Na realidade, em muito pouca coisa. A única diferença é que se terá de analisar duas situações em alternativa a uma ou, dito de outro modo, há que estudar a interação entre a empresa *A* e a empresa *B* quando se espera que esta tenha baixos custos e a interação entre a empresa *A* e a empresa *B* quando se espera que esta tenha custos elevados. Temos então duas possíveis matrizes de resultados:

Cenário 1: empresa *B* com custos baixos (probabilidade = 1/2)		empresa *B*	
		p_A	p_B
empresa *A*	p_A	(6,5)	(1,8)
	p_B	(10,2)	(7,4)

Cenário 2: empresa *B* com custos elevados (probabilidade = 1/2)		empresa *B*	
		p_A	p_B
empresa *A*	p_A	(6,1)	(3,2)
	p_B	(10,2)	(7,2)

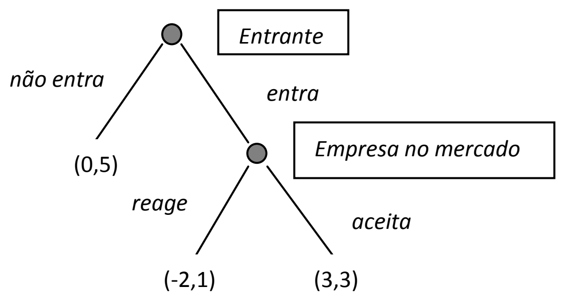
Quando os custos de produção da empresa *B* são elevados, as empresas têm ambas estratégias dominantes, que consistem na fixação do preço p_B. No cenário 2, acontece o mesmo (embora com dominância fraca no caso da empresa *B*). Deste modo, apesar de ignorar se os custos da outra empresa vão ser altos ou baixos, a empresa *A* tem sempre vantagem em escolher o preço p_B, e portanto a informação incompleta não é, neste caso, um obstáculo à identificação de um equilíbrio de Nash.

5. Jogos sequenciais ou em forma extensiva

Uma das propriedades fundamentais dos jogos até ao momento alvo de análise, a que chamámos jogos em forma normal, é que eles são jogos estáticos, no sentido em que os jogadores tomam decisões em simultâneo. Em alternativa, podemos considerar jogos sequenciais ou jogos em forma extensiva, que são dinâmicos uma vez que as estratégias são escolhidas não em simultâneo mas em sequência.

Os jogos sequenciais não serão apresentados através de uma matriz de resultados, mas sim sob a forma de uma árvore de jogo.

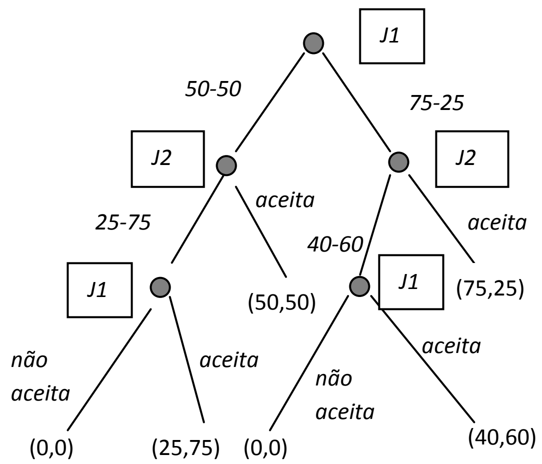
Admita-se a seguinte relação estratégica: Uma determinada empresa tem a possibilidade de entrar ou não em determinada indústria. Em função da eventual entrada, uma outra empresa, até agora monopolista no mercado, vai adotar uma de duas atitudes: reage, por exemplo através de uma política agressiva de preços, ou não reage à entrada do oponente. Agora as escolhas não são simultâneas, mas sim sequenciais: a ação da empresa instalada só poderá ocorrer depois da escolha efetuada pelo potencial entrante. A árvore do jogo será a seguinte:



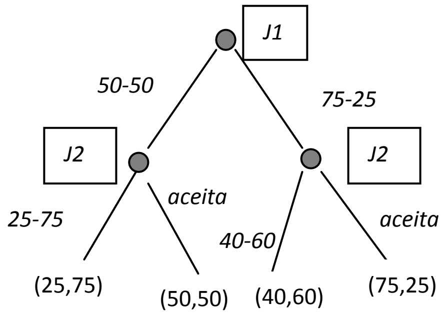
Os *payoffs* do jogo encontram-se no seguimento da sequência de decisões. Se o potencial entrante decide não entrar, o jogo acaba aí. A empresa monopolista no mercado ganha 5 e a que não entra nada ganha ou perde. Se o potencial entrante decide entrar, dois resultados são possíveis, em função da linha de ação seguida pela empresa instalada; ou aceita a entrada do concorrente, e as empresas acabam por dividir o mercado ganhando 3 cada uma; ou, então, ao reagir envolve-se numa guerra de preços que provoca um prejuízo de -2 na outra empresa e a leva a ter ganhos mais reduzidos, no valor de 1.

Como chegar a uma resultado de equilíbrio neste caso? Terá de se recorrer a uma técnica designada por *backward induction*. Na prática, esta técnica consiste em analisar o jogo do fim para o princípio, o que permite através do uso de raciocínio lógico chegar ao resultado do jogo. Neste caso em particular, comecese por observar quais as opções disponíveis para a empresa já instalada. Se ela reagir à hipotética entrada, ganha 1; se não reagir ganha 3. Portanto, não irá reagir caso a outra empresa decida instalar-se no mercado. Como o jogo é de informação perfeita, o potencial entrante estará na posse desta informação e decidirá de acordo com isso. Se a empresa não entra ganha 0; se entrar, dado que a outra empresa não reage, ganha 3. Assim sendo, o entrante opta por entrar e a empresa instalada por aceitar essa entrada. Com isso, o *payoff* de ambas as empresas é 3.

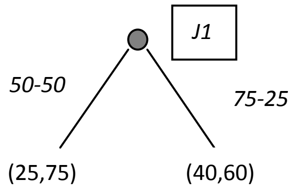
Os jogos sequenciais podem tornar-se bastante sofisticados e de difícil análise quando os jogadores têm a possibilidade de ir respondendo sucessivamente às ações anteriores do outro jogador. Considere-se um segundo exemplo, um pouco mais elaborado. Dois jogadores decidem a melhor forma de dividir 100 euros. O jogador 1 tem duas alternativas iniciais: propor uma divisão 50-50 ou uma divisão 75-25. Perante a primeira opção, o jogador 2 pode aceitá-la (e os *payoffs* são 50-50) ou propor uma nova distribuição, 25-75. Neste último caso, o jogador 1 volta a entrar no jogo, para aceitar a proposta do jogador 2 ou para a rejeitar (caso em que nenhum deles fica com qualquer parte do dinheiro). Se o jogador 1 faz a proposta inicial 75-25, o jogador 2 vai aceitá-la ou, alternativamente, faz a contra-proposta 40-60. Esta ou é aceite pelo jogador 1 ou, sendo rejeitada, os 100 euros não são distribuídos entre jogadores. A árvore de resultados vem:



Uma vez mais, resolve-se o jogo por *backward induction*. O último participante a jogar é o jogador 1. Em qualquer dos casos, as alternativas aceitar a proposta produzem um resultado mais satisfatório; por conseguinte, na última etapa do jogo, o jogador 1 vai sempre escolher a opção aceitar, independentemente da proposta feita pelo jogador 2. Isso permite reduzir a dimensão da árvore do jogo, que passa a ser:



Em seguida, o jogador 2 verifica que tem, em qualquer dos dois casos, vantagem em não aceitar a proposta do jogador 1, pois isso permite-lhe sempre obter um maior *payoff*. Logo, as opções de aceitação podem ser removidas do jogo, e este fica reduzido a:



Por fim, analisamos a escolha inicial do jogador 1. Se ele propuser uma divisão 50-50, a negociação leva a um resultado em que este fica com 25 euros e o outro jogador com 75 euros. Caso a proposta inicial seja 25-75, o processo de negociação leva ao resultado final em que o jogador 1 fica com 40 euros e o jogador 2 com 60 euros. A melhor estratégia para o jogador 1 será então propor inicialmente a divisão 75-25.

Recapitulando, por *backward induction* é possível identificar que o jogador 1 vai começar por fazer a proposta dos 100 euros de tal forma que ele ficaria com 75 e o outro jogador com 25. A estratégia ótima do jogador 2 será não aceitar e contrapropor a divisão 40-60. Numa terceira jogada, a estratégica dominante do jogador 1 consiste em aceitar a proposta feita pelo jogador 2 no momento prévio.

O modo de análise dos jogos sequenciais que se descreveu permite estudar situações em que a sequência de escolhas é muito mais ampla do que aquilo que acontece nos exemplos apresentados. É o que acontece no jogo das 21 moedas. Neste jogo, dois jogadores retiram alternadamente 1, 2 ou 3 moedas de um conjunto de 21. Quem retirar a última moeda perde. Os *payoffs* são 1 para o vencedor e -1 para o vencido. Este resultado pode ser representado sob a forma de uma árvore, porque é um jogo sequencial, mas as possibilidades de jogo acabam por ser tantas que tornam essa árvore demasiado complexa e pouco informativa. Mas mesmo na ausência da árvore é possível estabelecer o raciocínio que nos leva ao equilíbrio do jogo, e isto acontece uma vez mais por *backward induction*.

Admita-se o cenário de fim de jogo em que já só há uma moeda na mesa; quem a retirar perde. Se forem duas as moedas ainda em jogo, aquele que está na sua vez de jogar retira uma só moeda e portanto ganha. O mesmo acontece se estiverem disponíveis 3 ou 4 moedas, pois nessa caso retiram-se 2 ou 3, respetivamente, para que só uma sobre. Se houver 5 moedas a derrota é certa independentemente das moedas retiradas porque o outro jogador vai ficar em posição vencedora. Repetindo este raciocínio percebe-se que deter 1, 5, 9, 13, 17 ou 21 moedas são posições perdedoras, e todas as outras são vencedoras. Por conseguinte, o segundo jogador pode sempre garantir a vitória, independentemente de como o primeiro jogador joga. A estratégia é simples: retirar sempre o número de moedas que faz com que sobrem 1, 5, 9, 13 ou 17.

6. Jogos evolucionários

Os jogos sequenciais envolvem uma faceta dinâmica. Porém, essa dinâmica encontra-se circunscrita à reação que um jogador tem num determinado momento face à ação de outro ou outros agentes no período de tempo anterior. Nesse caso não existe uma regra dinâmica que determine todo o desenrolar do jogo desde um qualquer momento presente até a um horizonte futuro estabelecido à partida.

Os jogos evolucionários são efetivamente dinâmicos, porque assentam num mecanismo que permite perceber de que modo as estratégias seguidas pelos jogadores podem mudar à medida que o jogo vai evoluindo. Neste caso, acrescenta-se um elemento importante àqueles até agora tomados para compor um jogo. Para além de jogadores, estratégias e *payoffs*, considera-se agora também uma regra dinâmica que pode alterar *payoffs* e, por conseguinte, a forma como os jogadores se comportam ao longo do tempo.

Nos jogos evolucionários será de esperar a convergência para um equilíbrio dominante de longo prazo. Neste equilíbrio, atingido após um período de transição dinâmica, os jogadores deverão ter adotado uma estratégia estável do ponto de vista evolucionário, ou seja, uma estratégia que os jogadores já não abandonarão, a menos que alguma força externa perturbe as condições subjacentes ao jogo.

Se a teoria dos jogos pode ser definida como a ciência que estuda o comportamento estratégico, com a teoria dos jogos evolucionária dá-se um passo em frente; temos agora a ciência que estuda a robustez do comportamento estratégico. Nos jogos evolucionários há um reconhecimento implícito de que os agentes aprendem; a estratégia que eles escolhem no período inicial poderá não ser a que maximiza a utilidade, no entanto a interação sistemática com outros levará a que modifiquem o seu comportamento ao longo do tempo no sentido da escolha de tal estratégia.

Para abordar um jogo evolucionário, duas componentes são tidas em consideração. Primeiro, uma matriz de resultados semelhante às apresentadas para os jogos estáticos; segundo, uma regra dinâmica que estabelece o padrão de evolução do comportamento dos jogadores.

Não se pretende neste texto fazer uma análise exaustiva da teoria dos jogos evolucionários e tratar todas as situações possíveis. Apenas se exemplifica com o jogo mais popular neste campo: o jogo Falcão-Pomba. Considere-se uma população onde os indivíduos podem adotar uma de duas estratégias: a estratégia falcão, correspondente a um comportamento agressivo, e a estratégia pomba, que pressupõe um comportamento harmonioso. O resultado da interação entre um falcão e uma pomba encontra-se sintetizado na seguinte matriz:

		Jogador 2	
		Falcão	*Pomba*
Jogador 1	*Falcão*	(4,4)	(10,0)
	Pomba	(0,10)	(5,5)

Esta matriz é semelhante às atrás admitidas. Dois jogadores podem escolher duas estratégias diferentes, o que resulta nos *payoffs* apresentados. A adoção de um comportamento de falcão quando o outro jogador se comporta como pomba trás o resultado mais vantajoso para o primeiro; em contrapartida, o segundo não recolhe nenhum benefício. Se ambos se comportam como pombas, os ganhos são equitativamente distribuídos. Por fim, se os dois escolhem ser falcões, o comportamento agressivo traduz-se num custo que reduz o benefício conjunto, que é também neste caso dividido em partes iguais.

Do ponto de vista do equilíbrio estático, verifica-se que atuar como falcão é uma estratégia dominante para os dois jogadores, o que se traduz num equilíbrio de Nash que difere do equilíbrio cooperativo que poderia ser alcançado em caso de conluio (caso em que os dois jogadores prefeririam a estratégia pomba).

Para transformar este num jogo evolucionário, considere-se uma variável dinâmica p_t representativa da fração de indivíduos que na população adota a estratégia 'pomba'; o índice t representa o tempo. Cada uma das duas estratégias terá associada uma função de ajustamento, que indica qual a estratégia preferível. As funções de ajustamento são as seguintes:

$$f_t^F = 4\times(1\text{-}p_t)+10\times p_t \quad (11)$$

$$f_t^P = 0\times(1\text{-}p_t)+5\times p_t \quad (12)$$

A expressão (11) corresponde à função de ajustamento de ser 'falcão'; percebe-se a partir desta expressão que quantas mais 'pombas' existirem maior a vantagem em ser 'falcão'. Quanto a (12) indica que se todos os outros jogadores forem 'falcão' então não há qualquer vantagem em ser 'pomba'.

A evolução da fração p_t é determinada por uma regra dinâmica, conhecida por replicador e que toma a seguinte forma:

$$p_{t+1} = p_t \frac{f_t^P}{\overline{f_t}},\ \overline{f_t} = (1-p_t)f_t^F + p_t f_t^P,\ p_0 \text{ dado} \quad (13)$$

A equação (13) indica como é que a fração de indivíduos numa população que segue a estratégia pomba evolui no tempo. Como é óbvio, se só existem duas estratégias, conhecendo a evolução de uma também se conhecerá a evolução da outra.

Observe-se que:

$$\overline{f_t} = 4(1-p_t)^2 + 10(1-p_t)p_t + 5{p_t}^2 \quad (14)$$

Substituindo (12) e (14) em (13) obtém-se uma equação dinâmica para a evolução da fração p_t,

$$p_{t+1} = \frac{5{p_t}^2}{4(1-p_t)^2 + 10(1-p_t)p_t + 5{p_t}^2} \quad (15)$$

Interessa conhecer o modo como p_t evolui no tempo dada a regra dinâmica (15). Para que, de modo simples, se perceba essa dinâmica, assuma-se que p_0=0,5, ou seja, que no estado inicial do jogo, metade dos jogadores escolhe ser 'falcão' e a outra metade escolhe ser 'pomba' (o resultado será o mesmo qualquer que seja a distribuição inicial de jogadores, isto se excluirmos as situações extremas: se todos os jogadores forem inicialmente 'falcão' ou todos os jogadores forem inicialmente 'pomba' assim permanecerão).

Se p_0=0,5, a regra (15) impõe a seguinte evolução para a fração de indivíduos a escolher ser 'pomba': p_0=0,5, p_1=0,2632, p_2=0,0777, p_3=0,0073, p_4=0,0001, … Claramente, a sucessão de valores indica que p_t converge rapidamente para zero, ou seja, os indivíduos na população percebem não ser vantajoso adotar uma estratégia de 'pomba', de modo que o equilíbrio de longo prazo é um equilíbrio onde todos os jogadores de comportam como 'falcão'. Num ambiente sem possibilidade de cooperação, os argumentos apresentados permitem perceber que toda a população encontra vantagem em acabar por se comportar como 'falcão'. Há um processo evolucionário que concentra o comportamento na estratégia 'falcão'.

Deste modo, a diferença entre um jogo estático e um jogo evolucionário é que o primeiro admite que os jogadores são hiper-racionais, conseguindo de imediato identificar a respetiva estratégia dominante. A teoria dos jogos evolucionária prevê um ajustamento gradual, em que o conjunto de jogadores vai progressivamente mudando para a estratégia dominante, de forma que o equilíbrio de Nash só é alcançado após a fase de transição dinâmica ter sido esgotada.

7. Bibliografia

Este texto foi preparado a partir das seguintes referências:

Church, J. e R. Ware (2000). *Industrial Organization: a Strategic Approach*. Boston, MA: McGraw-Hill, pp. 211-230 e 283-303.

Dutta, P.K. (1999). *Strategies and Games: Theory and Practice*. Cambridge, MA: MIT Press, pp. 423-459.

Fudenberg, D. e J. Tirole (1991). *Game Theory*. Cambridge, MA: MIT Press, pp. 423-459.

Gibbons, R.D. (2001). *A Primer in Game Theory*. Londres: Harvester Wheatsheaf.

Gomes, O. (2012). "Discrete Dynamics in Evolutionary Games." *Discrete Dynamics in Nature and Society*, article ID 416789, 23 pages, doi: 10.1155/2012/416789.

Jehle, G.A. e P.J. Reny (2011). *Advanced Microeconomic Theory* (3ª edição). Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall.

Rasmusen, E. (2006). *Games and Information: an Introduction to Game Theory* (4ª edição). Hoboken, NJ: Wiley-Blackwell.

Tirole, J. (1988). *The Theory of Industrial Organization*. Cambridge, MA: MIT Press, pp. 423-459.

Vega-Redondo, F. (1996). *Evolution, Games and Economic Behaviour*. New York, NY: Oxford University Press.

Weibull, J.W. (1995). *Evolutionary Game Theory*, Cambridge, MA: MIT Press.